

Übungen zur Analysis 2

Blatt 13

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 22.01.2009

Aufgabe 60 (6 Punkte)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reell-symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ sowie $f(x) := x^T A x + 2b^T x$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige: f besitzt im \mathbb{R}^n genau ein globales Minimum x_0 , nämlich $x_0 = -A^{-1}b$, und es gilt $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -b^T A^{-1}b$.

Hinweis: Aufgabe 49.

Aufgabe 61 (8 Punkte)

Es sei $I = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Gegeben sei die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \cap I, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f nicht Riemann-integrierbar über I ist.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], y \in \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar über I ist und berechne $\int_I f$.

Aufgabe 62 (6 Punkte)

Berechne, falls existent, die iterierten, uneigentlichen Integrale

$$\int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3} dy \right) dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3} dx \right) dy.$$

<http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/>